مراجعة لبعض الأمور الهامة في نظرية الاحتمالات

- لقد عرفنا بالفصل الأخير في مقرر نظرية الاحتمالات على كيفية ايجاد التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي تابع لمتغير عشوائي معلوم وذلك في الحالتين عندما يكون المتغير الأساس منقطع أو مستمر.

وأخذنا أمثلة في حالة متغير منقطع وفي حالة متغير مستمر

مثلاً في حالة المتغير المستمر

اذا كان $x \sim (\mu, \sigma^2)$ وكانت $Y = e^x$

عندئذ لنوجد $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|_{x = \ln y}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{dx}{dy}\right|_{x = \ln y}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y} \quad ; \quad y > 0$$

وتدعى هذه الدالة بدالة كثافة لمتغير عشوائي لوغرايتمية

الدالة المولدة

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t}$$

$$E\,Y = E\,e^x = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$E\,Y^2 = E\,e^{2x} = M_X(2) = e^{2\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$V(Y) = E\,Y^2 - (E\,Y)^2$$

$$E\,\ln Y = E\,X = \mu$$

$$V(\ln Y) = V(X) = \sigma^2$$

أما في حالة X متغير منقطع وليكن متغيراً عشوائياً ثنائياً n, p وسطاء عندئذ لايجاد التوزيع الاحتمال $Y = X^2$ وجدنا أن

$$P_Y(y) = P_X(W(y))$$

$$= P_X(\sqrt{y})$$

$$= C_n^{\sqrt{y}}\, p^{\sqrt{y}}\, q^{n-\sqrt{y}} \quad ; \quad y = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$$

$$Y = X^2$$

$$X = \mp\sqrt{y}$$

أما الآن سوف نتعرف على كيفية ايجاد التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين

عشوائيين تابعين لمتغيرين عشوائيين آخرين لتوزيع احتمالي مشترك
سوف نركز الدراسة في هذه الفقرة على المتغيرين العشوائيين المستمرة
بفرض X,Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة
$f_{(x,y)}(x,y)$
ولدينا $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ بحيث $x = \psi_1(u,v)$, $y = \psi_1(u,v)$

بحيث $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ و $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ موجودة
عندئذ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ X, Y تعطى بالعلاقة

$$g(u,v) = f(x,y)\,|J|\quad x = \psi_1(u,v)$$
$$y = \psi_1(u,v)$$

و $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

ملاحظة:
X,Y مستقلان فإن $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

مثال:
بفرض X,Y متغيران عشوائيان مستمران لهما الدالة الاحتمالية المشتركة
: $x > 0 , y > 0$ و $f(x,y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{(x+y)}{2}}$
وليكن $u = x+y$ ① و $v = \frac{x}{y}$ ② والمطلوب:
ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين

الحل:
لدينا من ② $x = vy$ وبالتالي نعوض في ① نجد أن
$u = vy + y \Rightarrow u = (v+1)y \Rightarrow y = \frac{u}{v+1}$
نعوض y في ③ لنجد أن $x = \frac{uv}{v+1}$

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v}{v+1}$ و $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u(v+1) - (uv)}{(v+1)^2} = \frac{u}{(v+1)^2}$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v+1} \quad \& \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{u+1} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{uv}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3} = -u \frac{1+v}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2} \Longrightarrow$$

$$|J| = \frac{u}{(1+v)^2}$$

وبالتالي :

$$g(u,v) = \frac{1}{4} e^{-\frac{(x+y)}{2}} \cdot |J|_{\substack{x= \\ y=}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{u}{2}} \left(\frac{u}{(1+v)^2}\right) \; ; u>0$$

$v>0$

وهنا يمكن ان نسأل هل u, v متغيرين عشوائيين مستقلين

وبملاحظة ان

$$\sum g(u,v) = \frac{1}{4} u\, e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{(1+v)^2}$$

$$= g_u(u) \cdot g_v(v)$$

U يمثل متغير عشوائي غامي أ الأول $\lambda=2$ & الثاني $\lambda=\frac{1}{2}$

$$g_v(v) = \frac{1}{(1+v)^2} \quad ; \; v>0$$

$$\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} = \left[-\frac{1}{1+v}\right]_0^\infty = 1$$

اي ان u, v متغيران عشوائيان مستقلان لانه استطعنا كتابة دالة الكثافة الاحتمالية ~~العشوائية~~ المشتركة على شكل دالة واحدة لـ u وسالب غاما وثابتة لـ v ~~وهي~~

ضمن هذا التمرين يمكن ان نسأل ؟

بفرض $u_1, u_2, \ldots, u_n$ عينة عشوائية لـ u عندئذٍ من الدالة المولدة لمجموعة المتغيرات هذه العينة :

$$M_{\sum_{i=1}^{n} u_i}(t) = (M_u(t))^n = \left[(1-2t)^{-2}\right]^n$$

$$= (1-2t)^{-2n} = (1-2t)^{-\frac{4n}{2}}$$

ملاحظة:

اعتماداً على القاعدة السابقة لإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرين عشوائيين محددة كاملة

يمكن ايجاد دالة كثافة احتمالية لأحد المتغيرين وليكن n وذلك بأخذ متغير مساعد ومن ثم توجد دالة كثافة احتمالية مشتركة لمتغيرين بدلالة الأساسين ومن ثم توجد دالة الكثافة لها مثبتة للمتغير المطلوب

وعلى سبيل المثال:

بفرض لدينا متغير عشوائي طبيعي معياري أي أن X من النمط $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

حيث X, Y متغيران عشوائيان مستقلان عندئذ المتغير t يمكن متغير عشوائي ستودنت وسيط (n) بدرجة الحرية (n)

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$$

الآن لنوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير لإيجاد دالة كثافة لدالة المتغير t

سوف نأخذ متغير مساعد وليكن $Y = Z$ ومن ثم لنوجد دالة كثافة احتمالية المشتركة لـ t, Z بالقاعدة السابقة وبعدها نوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية فنحصل على المطلوب.

$$g(t,Z) = f(x,y)\,|J|_{\substack{x = t\frac{\sqrt{3}}{n} \\ y = 3}}$$

$$= f_X(x) \cdot f_Y(y)\,|J|_{\substack{x = t\frac{\sqrt{3}}{n} \\ y = 3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

$$g(t,3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{t^2 3}{2n}} \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ t, Z

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} 3^{(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})-1} e^{-\frac{3}{2}(1+\frac{t^2}{n})} \quad , \quad t \in R, \; 3 > 0$$

ومن ثم

$$g_1(t) = \int_0^\infty g(t,z)\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty z^{(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}(1+\frac{t^2}{n})}\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{2^{\frac{n+1}{2}-1}\,u^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}-1}} \cdot e^{-u} \cdot \frac{2\,dy}{(1+\frac{t^2}{n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-u}\,du \longrightarrow \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$